Lycée El Chabeb Douar Hicher — Décembre 2008

proposé par Mr : M.Jebri — 3 $^{\text{ème}}$ Math

Devoir de Synthèse
(1$^{\text{ère}}$ trimestre)

Exercice 1 : (3 points)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}}{(x-2)(x^2+1)}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2°) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
3°) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ? Justifier .

Exercice 2 : (4 points)

1°) Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x+3}$, montrer que g est prolongeable par continuité en -3 et définir son prolongement.

2°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ g(x) & \text{si } x \in \left]-\infty, 2\right[\text{ et } x \neq -3 \\ -8 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue en 2.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que l'équation f(x)=3 admet au moins une solution dans $\left[2,3\right]$.

Exercice 3 : (6 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=3 et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv -\dfrac{56\pi}{6}\left[2\pi\right]$

1°) Donner la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}\right)$ et construire alors ce triangle.

2°) Construire le point D tel que ABD soit équilatéral et $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ et le point F tel que AFC soit équilatéral et $\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$.

3°) Montrer que les droites (BC) et (FC) sont perpendiculaires.

4°) Montrer que $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AD}$.

5°) Soit $\Delta = \left\{ M \in P ; \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\left[2\pi\right] \right\}$.

a) Vérifier $F \in \Delta$.
b) Déterminer alors Δ .

Exercice 4 : (6 points)

ABC est un triangle direct du plan orienté P tel que AB=a, AC=2a et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1°) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2°) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

a) Calculer BJ et CI.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer BG et CG. déduire $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$ puis calculer $\cos\widehat{BGC}$.

3°) On pose : $\Delta = \left\{M \in P \;;\; 9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} + 5a^2 = 0\right\}$.

a) Vérifier que G appartient à Δ.

b) Déterminer Δ.

4°) On pose $\xi = \left\{M \in P \;;\; 4MI^2 + 2MC^2 = 9a^2\right\}$.

a) Montrer que ξ est un cercle de centre G dont on précisera le rayon.

b) Vérifier que A appartient à ξ. En déduire AG.